Proceedings of IAM, V.3, N.1, 2014, pp.3-14

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА*

Н.С. Джалилов[1] , Н.А. Алиев[2], Н.А. Исмайлов[2]

[1]Шамахинская астрофизическая обсерватория им.Н.Туси НАН Азербайджана
[2]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет
Баку, Азербайджан
e-mail: namigd@mail.ru, inao212@rambler.ru

Резюме. На основе 16-моментных МГД-уравнений переноса выведены уравнения стационарного радиального распространения солнечного ветра. В этих уравнениях учитываются температурная анизотропность протонной плазмы и тепловой поток вдоль ветра, что обобщают модель Паркера на случай учета эффектов анизотропии. Задача сводится к решению системы из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдено частное аналитическое решение, которое может быть использовано для нахождения глобальных решений, справедливых от Солнце до края гелиосферы.

Ключевые слова: космическая плазма, магнитная гидродинамика, солнечный ветер.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Прямые измерения космической плазмы в доступных для космических аппаратов областях - ионосфере, магнитосфере Земли и солнечном ветре показывают наличие температурной анизотропии плазмы относительно направления магнитного поля. Таким свойством обладает бесстолкновительная плазма в магнитном поле, наличие же столкновений частиц приводит к быстрой релаксации разности температур вдоль и поперек магнитного поля за время порядка времени столкновений. Между тем, наличие постоянных источников температурной анизотропии - различных кинетических процессов, сложной динамики частиц в магнитных полях, процессов сжатия и расширения плазмы в магнитном поле, процессов инжекции плазмы и микро-пересоединений и т.д., способно поддерживать ненулевое значение температурной анизотропии, которое необходимо учитывать при описании крупномасштабных динамических процессов, и применять для этого вместо уравнений обычной МГД уравнения анизотропной МГД. Подобные условия реализуются в плазме верхней солнечной короны, где присутствует достаточно источников создания и поддержания температурной анизотропии плазмы. Жидкостное описание

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 13.05.2014

динамики подобной плазмы, пронизанной сильным магнитным полем (ларморовский радиус меньше, чем длина свободного пробега частиц), усложнено анизотропными эффектами. Например, в верхних слоях солнечной короны и в корональных дырах даже при малых значениях интенсивности магнитного поля ($B \sim 10^{-3}$ Гс) плазма относительно направления магнитного поля становится температурно-анизотропной, т.е. поперечные и продольные давления и температуры плазмы не одинаковы, $p_{\perp}/p_{\|} = T_{\perp}/T_{\|} \neq 1$ [1]. В таких условиях функции распределения частиц (особенно ионов) не максвелловские и при малости столкновений обычные изотропные МГД уравнения неприменимы. Для МГД описания такой плазмы широко применялись уравнения Чу-Гольдбергера - Лоу (ЧГЛ) [2-4]. Однако эти уравнения не учитывают тепловые потоки, которые естественным образом возникают вдоль магнитного поля в бесстолкновительной плазме и содержат искусственно вводимые два адиабатических инварианта. Следовательно, эти уравнения не в состоянии описать такие важные сжимаемые неустойчивости как зеркальная и вторая шланговая неустойчивость. Для изучения эффектов, связанных с тепловым потоком вдоль магнитного поля, можно использовать наиболее общие МГД уравнения переноса для анизотропной плазмы, которые были получены многими авторами как уравнения для 16-ти моментов функции распределения частиц (см., например, [5-6]). Эти потоки обязаны своим происхождением течению плазмы вдоль магнитного поля.

В этой работе мы используем 16-моментные МГД-уравнения, которые учитывают тепловые потоки вдоль магнитного поля в анизотропной плазме солнечного ветра. 16-ти моментные уравнения были использованы многими авторами в теоретических исследованиях, особенно для моделирования солнечного ветра [7-10] и для изучения волновых неустойчивостей анизотропной плазмы [11-14]. Впервые Паркер [15-17] на основе обычных МГД уравнений моделировал радиального и стационарного истечения плазмы от Солнца. Эта модель описывает солнечного ветра лишь в общих чертах. Затем за последние 50 лет были многочисленные экспериментальные и теоретические исследования солнечного ветра [18]. Со временем вопросы, возникших в результате экспериментов накопились в большом количестве. Например, до сих пор мы не знаем механизм нагрева корональной плазмы и ускорение частиц, механизм непрерывного истечения плазмы и многокомпонентности солнечного ветра (медленный, быстрый и спорадические компоненты) и т.д. У медленного ветра (приходящий в основном по экватору Солнца с радиальной скоростью $v \approx 350$ км/с) протоны в продольном направлении нагреты больше, чем в поперечном направлении, $T_{p\|} > T_{p\perp}$. У быстрого ветра (истекающий в основном из корональных дыр со скоростью $v \approx 600$ км/с) все наоборот, $T_{p\|} < T_{p\perp}$.

В этой работе мы обобщили задачу Паркера, учитывая анизотропность плазмы солнечного ветра. Найдено частное аналитическое решение полученных уравнений.

2. Основные уравнения

Для описания плазмы обычно используется система уравнений, состоящая из кинетических уравнений для функций распределений каждого вида частиц и уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Гидродинамическое описание базируется на том допущении, что функции распределения плазменных компонентов по степеням свободы тепловой энергии очень близки к функции Максвелла. Однако, в реальных ситуациях солнечного ветра функции распределения частиц, особенно ионов, сильно отличаются от максвелловской. В короне, например, несмотря на малое отношение длины свободного пробега частиц к термодинамической шкале неоднородности $\lambda_{e,i}/\lambda_T \ll 1$, движение плазмы не может достаточно адекватно описываться теориями, которые допускают локальное распределение по скоростям близким к максвелловским

Функция распределения $f_a(\mathbf{u},\mathbf{r},t)$ определяет в заданный момент времени концентрацию частиц сорта a в шестимерном фазовом пространстве $(\mathbf{u},\mathbf{r})$ и является решением уравнения Больцмана–Власова:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla f_a + \frac{1}{m_a}\left[\mathbf{F}_a + e_a\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}]\right)\right] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_a = \mathrm{Q}_a(f_a). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – полные электрические и магнитные поля, e_a и m_a – электрический заряд и масса частицы сорта a, $\mathbf{F}_a$ – сила не электромагнитной природы, c – скорость света, $\nabla_{\mathbf{u}}$– градиент в пространстве скоростей и $\mathrm{Q}_a(f_a)$ – интегралы столкновений. При выводе этого статистического уравнения плазмы предполагалось, что отношение средней энергии взаимодействия двух частиц к их средней кинетической энергии достаточно мало [19]. Это условие, при использовании выражения радиуса Дебая r_{D} сводится к æ $= 1/(nr_D^3) \ll 1$, что в свою очередь означает, что плазма должна быть достаточно горячей и мало плотной. При малых æ корреляционные эффекты в равновесной плазме, как правило, малы. Если оценить порядки величин левой и правой части уравнения (1), то легко установить, что если порядок левой части равен единице, то правая часть имеет порядок æ для парных столкновений (интегралы столкновений Ландау, например) [19]. Для корональных условий æ $\approx 10^{-6}$. Следовательно, мы можем рассмотреть бесстолкновительную плазму, опуская правую часть уравнения (1), Q_a= 0.

Все макроскопические параметры плазмы (плотность, скорость течения, давление, тепловой поток, вязкость и т.д.) определяются соответствующими моментами функции распределения в пространстве микроскопических скоростей:

$$M^{(k)} = M^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(\mathbf{r},t) = \iiint \prod_{j=1}^{k} \mathrm{u}_{\alpha_j} f d\mathbf{u}, \qquad \alpha_i = 1,2,3. \qquad (2)$$

Например, плотность частиц равна $n = n(\mathbf{r}, t) = \int f \mathrm{d}\mathbf{u}$, для скорости плазмы имеем $n\mathbf{v}(r, t) = \int \mathbf{u} f d\mathbf{u}$, для разности давлений поперек и вдоль магнитного поля получаем $p_{\perp} - p_{\parallel} = \int m\left(\mathrm{u}_{\perp}^{2} - \mathrm{u}_{\parallel}^{2}/2\right) f d\mathbf{u}$. Из-за сложности уравнения (1), обычно для изучения макроскопического поведения плазмы получают уравнения для интегральных моментов функции распределения. Эти уравнения называются уравнениями переноса или гидродинамическими уравнениями. Основная трудность вывода уравнения моментов заключается в том, что цепочка уравнений бесконечна и они все зацеплены между собой. Требуются дополнительные физически обоснованные условия прерывания этой цепочки уравнений. В зависимости от принимаемых условий можно получить различные гидродинамические уравнения переноса. Обычные изотропные МГД-уравнения являются одной из разновидностей этих уравнений переноса. Они выводятся для условии $Q_a \neq 0$, когда плазма является столкновительной и основное равновесное состояние подчиняется максвелловскому распределению. Затем условие применимости обычной гидродинамики используется для обрыва цепочки уравнений моментов функции распределения

Для случая редких столкновений в сильном магнитном поле при определенных условиях (в основном для движений в поперечном к магнитному полю направлении) также удается вывести уравнения для макроскопических величин. В этом случае продольные и поперечные компоненты микроскопической скорости выступают как две независимые переменные, от которых зависит функция распределения, $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \to f\,(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\perp}, \mathbf{u}_{\parallel}\ t$. В этом случае решение кинетического уравнения обычно ищется в виде разложения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \sum\nolimits_{\nu} a_{\nu}(\mathrm{r}, \mathrm{t}) \mathrm{P}_{\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathrm{t}), \qquad (3)$$

где f_0 – нулевое приближение для функции распределения, a_ν – коэффициенты разложения, P_ν – ортогональный полином с номером ν. Если функцию f_0 заменить функцией Максвелла, тогда разложение (3) будет описывать состояние, близкое к термодинамическому равновесию. Такой метод поиска функции распределения называется методом Грэда [20]. Однако, использование обычной функции Максвелла не применимо для описания плазмы с произвольным анизотропным давлением. Для этой цели в работах [5-6] была использована би-максвелловская функция

$$f_0 = \frac{n\, m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_{\parallel}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m u_{\perp}^{2}}{2\kappa T_{\perp}} - \frac{m u_{\parallel}^{2}}{2\kappa T_{\parallel}}\right) \qquad (4)$$

в качестве нулевого приближения. Такая функция фактически является произведением двух функций Максвелла вдоль и поперек магнитного поля. Этот метод в отличие от обычного метода Грэда вводит два вектора теплового потока. В этом случае полная функция распределения находится из 16-ти моментных уравнений, в то время как обычный метод Грэда дает уравнения для 13-ти моментов.

При выводе 16-ти моментных уравнений для прерывания цепочки уравнений применялись следующие допущения: 1) компоненты тензора вязкости малы по сравнению с компонентами давления $p_\perp$ и $p_\parallel$; 2) компоненты теплового потока малы $S_\perp, S_\parallel \ll \rho v_T^3$, , где $v_T = \sqrt{2\kappa T/m}$ – тепловая скорость частиц. В поперечном направлении эти требования выполняются, если $r_B \ll L_\perp$. В продольном же направлении должно быть $v_{T\parallel}\tau \ll L_\parallel$. Здесь $L_{\parallel,\perp}$ – характерные масштабы неоднородности плазмы. Последнее условие означает, что силы давления малы по сравнению с электромагнитными силами.

Для описания макроскопического движения бесстолкновительной плазмы в присутствии ускорения силы тяжести и без учета магнитной диффузии записываются в следующем виде [5-6]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla\left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \rho\mathbf{g} + \\ + (p_\perp - p_\parallel)[\mathbf{h}\operatorname{div}\mathbf{h} + (\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{h}] + \mathbf{h}(\mathbf{h}\cdot\nabla)(p_\perp - p_\parallel),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{p_\parallel B^2}{\rho^3} = -\frac{B^2}{\rho^3}\left[\mathrm{B}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\frac{S_\parallel}{B} + \frac{2S_\perp}{B}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathrm{B}\right], \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{p_\perp}{B\rho} = -\frac{B}{\rho}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\frac{S_\parallel}{B^2}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{S_\parallel B^3}{\rho^4} = -\frac{3p_\parallel B^3}{\rho^4}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\frac{p_\parallel}{\rho}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{S_\parallel B^3}{\rho^4} = -\frac{3p_\parallel B^3}{\rho^4}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\frac{p_\parallel}{\rho}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{S_\perp}{\rho^2} = -\frac{p_\parallel}{\rho^2}\left[(\mathbf{h}\cdot\nabla)\frac{p_\perp}{\rho} + \frac{p_\perp}{\rho}\frac{p_\perp - p_\parallel}{p_\parallel B}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathrm{B}\right], \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{V} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{V} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{B}}{B},\end{gathered} \tag{12}$$

где ρ – плотность плазмы, $p_\perp$и $p_\parallel$ - поперечные и продольные давления, $\mathbf{B}$ – интенсивность магнитного поля, $\mathbf{V}$- массовая скорость и $\mathbf{g}$ – ускоренеие силы тяжести. В этих уравнениях электроны предполагаются холодными ($p_e \ll p_i$) и их вкладом пренебрегается. Индексы $\parallel$ и $\perp$ обозначают величины в продольном и поперечном относительно внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$

направлениях. Особенностью этих уравнений, отличающих их от уравнений обычной изотропной МГД и уравнений МГД-приближения бесстолкновительной плазмы Чу-Голдбергера-Лоу (ЧГЛ), является наличие в них двух тепловых потоков $S_{\|}$ и $S_{\perp}$ вдоль магнитного поля, связанных с продольной и поперечной температурами.

Рассмотрим сферическую симметричную стационарную корону, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Пусть в сферически-полярных координатах (r, θ, ϕ) в плоскости экватора $(\theta = \pi/2)$ все переменные зависят только от радиального расстояния r: $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$. Рассмотрим плоское истечение плазмы, $V_\theta = 0$, вдоль которого, ввиду вмороженности, тянется магнитное поле Солнца, $B_\theta = 0$. Ускорение силы тяжести определяется как $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{e}_r G M_\odot / r^2$. Для рассматриваемого плоского одномерного течения плазмы уравнения существенно упрощаются. Вместо (12) и (5) получим два закона сохранения:

$$r^2 B_r = C_1, \ \ r^2 \rho V_r = C_2. \tag{13}$$

Здесь C_1 и C_2 − постоянные интегрирования, которые должны определяться из граничных условий. Далее, r и $\theta -$ компоненты уравнения (11) выполняются автоматически, а ϕ −компонента после интегрирования дает

$$r\left(B_\phi V_r - V_\phi B_r\right) = C_3, \tag{14}$$

где $C_3 = const$. Уравнение движение (6) также допускает полные интегралы. $\phi -$ компонента этого уравнения переходит в

$$\frac{d}{dr} r^3 \left(\rho v_r v_\phi - \frac{1}{4\pi} B_r B_\phi + \Delta h_r h_\phi\right) = 0, \tag{15}$$

которого можно представить как

$$r v_\phi + \frac{r}{4\pi} \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{4\pi\Delta}{B^2} - 1\right) B_\phi = C_4. \tag{16}$$

Вместо r −компоненты уравнения (6) воспользуемся уравнением сохранения полной энергии. В рамках сделанных выше допущений это уравнение переходит в:

$$r^2 \left\{ V_r \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{B^2}{4\pi} + 2p_\perp + \frac{p_\|}{2} - \rho \frac{G M_\odot}{r} \right) + \right.$$
$$\left. + h_r \left[(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{h}) \left(\Delta - \frac{B^2}{4\pi} \right) + S_\perp + \frac{S_\|}{2} \right] \right\} = C_5. \tag{17}$$

Здесь отметим, что если перейти в изотропную МГД, положив в уравнениях (13)-(17) $p = p_\| = p_\perp$ и $S_\| = S_\perp = 0$, и добавив к ним политропное соотношение для газовово давления $p(\rho)$, то получим замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений. Это есть классическая задача Вебера-Девиса для солнечного ветра [21] (см. также в [4] уравнения (23.20)). Если же убрать в задаче Вебера-Девиса спиральност $(B_\phi = V_\phi = 0)$, то перейдем в классическую модель Паркера [15].

Наша задача сложнее из-за включения 4-х дополнительных уравнений. Уравнение (8) для $p_\perp$ также допускает полный интеграл:

$$\frac{r^2}{B}(p_\perp V_r + S_\perp h_r) = C_6. \tag{18}$$

Уравнения для $p_\parallel$ (7) остается дифференциальным:

$$\frac{\rho^2}{B^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{B^2}{\rho^2}\frac{p_\parallel V_r}{B_r}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{S_\parallel}{B}\right) - 2S_\perp\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{B}\right) = 0. \tag{19}$$

Остальные два уравнения для тепловых потоков (9) и (10) принимают вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{B^3}{\rho^3}\frac{S_\parallel V_r}{B_r}\right) + \frac{3}{2}\frac{B^2}{\rho^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{p_\parallel}{\rho}\right)^2 = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{S_\perp V_r}{\rho B_r}\right) + \frac{p_\parallel}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{B}\frac{p_\perp}{\rho}\right) - \left(\frac{p_\perp}{\rho}\right)^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{B}\right) = 0. \tag{21}$$

3. Обобщение модели Паркера

При $B_\phi = 0$ и $V_\phi = 0$ полученные выше уравнения упрощаются. Учитывая, что $B = B_r$, $h_r = 1$, $h_\phi = 0$ эти уравнения переходят в следующую систему:

$$r^2 B = C_1, \quad r^2\rho v = C_2, \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\rho}\left(p_\perp + \frac{3}{2}p_\parallel\right) + \frac{1}{\rho v}\left(S_\perp + \frac{1}{2}S_\parallel\right) - \frac{GM_\odot}{r} = \frac{C_5}{C_2}, \tag{23}$$

$$r^4(p_\perp v + S_\perp) = C_1 C_6, \tag{24}$$

$$r^4\rho^2\frac{d}{dr}\left(\frac{v_r p_\parallel}{r^2\rho^2}\right) + \frac{d}{dr}(r^2 S_\parallel) - 4rS_\perp = 0, \tag{25}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{d}{dr}\left(S_\parallel\frac{v^3}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{p_\parallel}{\rho}\right)^2 = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 S_\perp\frac{v}{\rho}) + \frac{p_\parallel}{\rho}\frac{d}{dr}(r^2\frac{p_\perp}{\rho}) - 2r\left(\frac{p_\perp}{\rho}\right)^2 = 0, \tag{27}$$

где $v = V_r$. Уравнение общей энергии (17) и все остальные уравнения не содержат магнитного поля. На рассматриваемое радиальное плоское течение магнитное поле не оказывает прямого воздействия. Следствием приутствия магнитного поля это анизотропия в давлении и в тепловом потоке. Уравнения (17) и (18) позволяют легко исключить из системы тепловых потоков $S_\parallel$ и $S_\perp$. Вводим тепловые скорости $u_\parallel^2 = p_\parallel/\rho$ и $u_\perp^2 = p_\perp/\rho$, для которых и для квадрата скорости течения v^2 получим уравнения

$$\left(\frac{u_\parallel^2}{v^2} - 1\right)\frac{dv^2}{dr} - 2\frac{du_\parallel^2}{dr} + \frac{4}{r}u_\perp^2 - 2\frac{GM_\odot}{r^2} = 0, \tag{28}$$

$$\left(\frac{u_\parallel^2}{v^2} - 1\right)\frac{du_\parallel^2}{dr} + \frac{4}{3}\frac{1}{v^2}\left(C_5' + \frac{GM_\odot}{r} - \frac{C_6'}{r^2} - \frac{3}{4}v^2 - \frac{3}{2}u_\parallel^2\right)\frac{dv^2}{dr} + $$
$$+ \frac{2}{3}\frac{1}{r^2}\left(2C_6'\frac{1}{r} - GM_\odot\right) = 0, \tag{29}$$

$$(C_6' - r^2 u_\perp^2)\frac{dv^2}{dr} + \left(u_\parallel^2 - v^2\right)\frac{d}{dr}(r^2 u_\perp^2) - 2ru_\perp^4 = 0, \tag{30}$$

где $C_5' = C_5/C_2$, $C_6' = C_6 C_1/C_2$. (Напомним, что по размерности $[C_5'] = [v^2], [C_6'] = [r^2 v^2]$, $[GM_\odot] = [rv^2]$.) Теперь переходим к безразмерным переменным и параметрам:

$$\mathrm{x} = \frac{r}{R_\odot},\ \ X = \frac{v^2}{v_*^2},\ \ Y = \frac{u_\parallel^2}{v_*^2},\ \ Z = x^2\frac{u_\perp^2}{v_*^2}, \tag{31}$$

$$\bar{g} = \frac{GM_\odot}{R_\odot v_*^2} = \frac{g_\odot}{v_*^2/R_\odot},\ \ \overline{C_5} = \frac{C_5'}{v_*^2},\ \ \overline{C_6} = \frac{C_6'}{R_\odot^2 v_*^2}. \tag{32}$$

Здесь $R_\odot$ –радиус Солнца, v_* – характерная скорость ветра, скажем на орбите Земли ($= v_E$). Имеем

$$\left(\frac{Y}{X}-1\right)X'(x) - 2Y'(x) + \frac{4}{x^3}Z - \frac{2\bar{g}}{x^2} = 0, \tag{33}$$

$$(\overline{C_6} - Z)X'(x) + (Y-X)Z'(x) - \frac{2}{x^3}Z^2 = 0, \tag{34}$$

$$\left(\frac{Y}{X}-1\right)Y'(x) + \frac{4}{3}\left(\overline{C_5} + \frac{\bar{g}}{x} - \frac{\overline{C_6}}{x^2} - \frac{3}{4}X - \frac{3}{2}Y\right)\frac{X'(x)}{X} + \frac{2}{3x^2}\left(\frac{2\overline{C_6}}{x} - \bar{g}\right) = 0. \tag{35}$$

После некоторых не сложных вкладок получаем:

$$f\frac{dX}{dx} + \left(\frac{Y}{X}-1\right)\left(\frac{2}{x^3}Z - \frac{\bar{g}}{x^2}\right) + \frac{2}{3x^2}\left(\frac{2\overline{C_6}}{x} - \bar{g}\right) = 0, \tag{36}$$

$$f\frac{dY}{dx} - \frac{4}{3}\frac{1}{X}\left(\overline{C_5} + \frac{\bar{g}}{x} - \frac{\overline{C_6}}{x^2} - \frac{3}{4}X - \frac{3}{2}Y\right)\left(\frac{2}{x^3}Z - \frac{\bar{g}}{x^2}\right) + \frac{1}{3x^2}\left(\frac{2\overline{C_6}}{x} - \bar{g}\right)\left(\frac{Y}{X}-1\right)=0. \tag{37}$$

$$f(X-Y)\frac{dZ}{dx} + (\overline{C_6} - Z)\left[\left(\frac{Y}{X}-1\right)\left(\frac{2}{x^3}Z - \frac{\bar{g}}{x^2}\right) + \frac{2}{3x^2}\left(\frac{2\overline{C_6}}{x} - \bar{g}\right)\right] + f\frac{2}{x^3}Z^2 = 0. \tag{38}$$

Здесь нули функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2 - 1 - 2\frac{Y}{X} + \frac{4}{3}\frac{1}{X}\left(\overline{C_5} - \frac{\overline{C_6}}{x^2} + \frac{\bar{g}}{x}\right) \tag{39}$$

являются сингулярностью уравнений (36) - (38). В коэффициенты уравнения входят две неизвестные постоянные $\overline{C_5}$ и $\overline{C_6}$. В принципе их можно было однозначно определить, если были бы известные на границе не только значения переменных $\{X, Y, Z\}$, но также их первые производные. Однако эти производные неизвестны. Далее исходим из того, что найденные решения должны быть регулярными везде, включая сингулярных точек и бесконечности. Из этой системы получим окончательно

$$3x^3\frac{dX}{dx} + \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0 \tag{40}$$

$$6x^3\frac{dY}{dx} + \frac{f_2(x)}{f(x)} = 0, \tag{41}$$

$$6x^3X\frac{dZ}{dx} + \frac{f_3(x)}{f(x)A(x)} = 0, \tag{42}$$

$$A = \frac{Y}{X} - 1, B = -\frac{9}{4}X + \bar{C}_5 + \frac{\bar{g}}{x} - \frac{\bar{C}_6}{x^2}, D = 2Z - x\bar{g}, E = 2\bar{C}_6 - x\bar{g},$$

$$f = \frac{1}{2}A(A-4) + \frac{4}{3}\frac{B}{X}, \qquad f_1 = 3AD + 2E,$$

$$f_2 = Af_1 - 6Df, \qquad f_3 = f_1(D-E) - 12fZ^2.$$

Здесь не нарушая общность, можем положить $\bar{g} = 1$. Тогда для Солнца нормировочная скорость $v_* = \sqrt{GM_\odot/R_\odot} \approx 437.8$ км/сек. Эти уравнения являются обобщением задачи Паркера на случай анизотропной плазмы солнечного ветра.

3. Частное решение задачи Паркера

Как следует из (40)-(42), условия $f(X,Y;x)=0$ и $f_1(X,Y,Z;x)=0$ на всей оси x автоматически удовлетворяют эти уравнения. При этом производные искомых функций $X'(x)$, $Y'(x)$ и $Z'(x)$ остаются конечными. Из $f_1(X,Y,Z;x)=0$ найдем Z(x):

$$Z(x)=\frac{x}{2}+\frac{x-2\bar{C}_6}{3A(x)}. \qquad (43)$$

Уравнение $f(X,Y;x)=0$ определяет функцию $A(x)=Y(x)/X(x)-1$:

$$\frac{1}{2}A(x)=1\pm\sqrt{1-2B/(3X)}. \qquad (44)$$

Следовательно, должно выполняться условие $2B\le 3X$. Таким образом, функции Z(x) и Y(x) (или A(x)) определяются функцией X(x), которая является свободной. Например, пусть

$$X(x)=a\left(\bar{C}_5+\frac{1}{x}-\frac{\bar{C}_6}{x^2}\right), \qquad (45)$$

где $a=\text{const}$ и $a\ge 4/15$. Тогда $A=2\pm 2\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{3a}\right)^{1/2}$. Воспользуемся наблюдаемые на земной орбите $r=r_E=1$ а.е. следующие значения параметров быстрого ветра

$$x_E=214, X_E=1.87, \quad Y_E=0.01X_E, \quad Z_E=1910.$$

Эти значения позволяют найти оценки: $a=2.52, \bar{C}_5=0.8, \bar{C}_6=2784$. Однако на Солнце ($x=1$) решение (45) становится отрицательным, $X(1)<0$. Следовательно, этот пример не описывает солнечный ветер.

Рассмотрим другой пример. Из уравнения $f(X,Y;x)=0$ найдем функцию $X(x)$:

$$X(x)=-\frac{8}{3}\,\frac{\bar{C}_5x^2+x-\bar{C}_6}{x^2(A^2-4A-6)}=-\frac{8}{3}\,\frac{\bar{C}_5x+1+\bar{C}_5x_*}{x^2}\,\frac{x-x_*}{(A-A_*+2\sqrt{10})(A-A_*)}, \qquad (46)$$

где $x_*=\frac{\sqrt{1+4\bar{C}_5\bar{C}_6}-1}{2\bar{C}_5}$, $A_*=A(x_*)=2+\sqrt{10}$. Следовательно, уравнения (43) и (46) определяют функций $X(x)$ и $Z(x)$ в зависимости от свободной функции $A(x)$. Для выбора функцию $A(x)$ будем исходить из соображения асимптотического поведения искомых решений. При $x\to\infty$ плотность плазмы $\rho\sim x^{-k}$, где $k\ge 0$. Тогда из закона сохранения потока массы (22) следует, что $v\sim x^{k-2}$, где $k\le 2$. Отсюда $X\sim x^{-\mu}$ с ограничением $0\le\mu\le 4$. Выражение (46) указывает на то, что асимптотическое поведение функции $A(x)$ должно быть как $A(x)\sim x^{\mu/2}$.

С другой стороны, в реальном солнечном ветре функция $A(x)$ должна два раза пройти через ноль в $x=x_1$ и $x=x_2$, где $1<x_1<x_2<\infty$. В стартовой точке на Солнце и в конце гелиосферы, где скорость ветра замедляется, должно быть $A(x)>0$ (субзвуковой ветер). В области между этими нулями $A(x)<0$ (сверхзвуковой ветер). Как следует из измерений, земная орбита $x=x_E\approx 214$ должна находиться в зоне сверхзвукового ветра. Однако определить функцию $A(x)$ как $A\sim(x-x_1)(x-x_2)x^{\mu/2-2}$ мы не можем из-за того, что функция $Z(x)$ (43) становится в одной из этих точек сингулярной. Ограничимся следующим простым выражением

$$A(x) = a\,\frac{x-2\bar{C}_6}{x-b}\,x^{\mu/2} \tag{47}$$

Неизвестные постоянные a и b могут быть определены из граничных условий $A(x_E) = A_E, A(x_*) = A_*$:

$$a = \frac{A_E A_*(x_E - x_*)}{A_* x_E^{\nu}(x_E - 2\bar{C}_6) - A_E x_*^{\nu}(x_* - 2\bar{C}_6)}, \tag{48}$$

$$b = \frac{A_* x_E^{\nu}(x_E - 2\bar{C}_6)x_* - A_E x_*^{\nu}(x_* - 2\bar{C}_6)x_E}{A_* x_E^{\nu}(x_E - 2\bar{C}_6) - A_E x_*^{\nu}(x_* - 2\bar{C}_6)}, \tag{49}$$

где $\nu = \mu/2$ и $0 \le \nu \le 2$. Для параметров медленного ветра на земной орбите

$$x_E = 214, X_E = 0.64, Y_E = 0.04, Z_E = 716$$

находим, что $\bar{C}_5 \approx 0.345$, $\bar{C}_6 \approx 963.4, x_* \approx 51.4, A_* \approx 5.16, A_E \approx -0.937$. Для этих параметров постоянные a и b монотонно убывают по ν. В интервале $\nu = 0 \div 2$ получаем $a = 0.074 \div 1.9\;10^{-6}$, $b = 78.36 \div 53.23$. Таким образом, найденные решения (43), (46) и (47) могут быть применены в области $x > b$.

5. Заключение

Выведенные нами уравнения (40-42) являются обобщением задачи Паркера на случай анизотропного радиального и стационарного солнечного ветра. Эти уравнения являются новыми и никем не были исследованы. Основная трудность решения этих уравнений связаны с нулями функций $f(x)$ и $A(x)$ в области интегрирования $1 \le x \le \infty$.Однако уравнения содержат двух неизвестных постоянных $\bar{C}_5$ и $\bar{C}_6$, которые позволяют сделать сингулярности устранимыми. Это мы показали для частного случая, когда функции $f(x)$ и $f_1(x)$ обращаются в ноль не в отдельных точках, а на всей оси x. Найденные нами решения являются локальными. Основные недостатки этих решений заключаются в том, что функция $X(x)$ становится отрицательной при $x \to \infty$ и имеет сингулярность в одной точке. Тем не менее, найденное решение будет полезным для построения глобального численного решения уравнений распространения солнечного ветра.

Литература

1. Aschwanden M.J., Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions, Berlin: Springer, 2005, 892 p.
2. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E., The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions, Proc. Roy. Soc. London A., Vol. 236, No.1204, 1956, pp.112-118.
3. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T., Propagation of Hydromagnetic Waves in Collisionless Plasma. I, J. Phys. Soc. Japan, Vol.21, No.4, 1966, pp.765-777.

4. Баранов В.Б., Краснобаев К.В., Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977, 335 с.
5. Ораевский В.Н., Коников Ю.В., Хазанов Г.В., Процессы переноса в анизотропной околоземной плазме, М.: Наука, 1985, 171 с.
6. Ramos J.J., Dynamic evolution of the heat fluxes in a collisionless magnetized plasma, Phys. Plasmas, Vol. 10, No.9, 2003, pp. 3601-3607.
7. Demars H.G., Schunk R.W., Transport equations for multispecies plasmas based on individual bi-Maxwellian distributions., J. Phys. D., Vol. 12, No.5, 1979, pp.1051-1077.
8. Olsen E.L., Leer E., A study of solar wind acceleration based on gyrotropic transport equations, Geophys. Res. J., Vol. 104, No.A5, 1999, pp. 9963-9974.
9. Li X., Proton temperature anisotropy in the fast solar wind: A 16-moment bi-Maxwellian model, J. Geophys. Res., Vol.104, No.A9, 1999, pp.19773-19785.
10. Lie-Svendsen O., Leer E., Hasteen V.H., A 16-moment solar wind model: From the chromosphere to 1 AU., J. Geophys. Res., Vol.106, No.A5, 2001, pp.8217-8232.
11. Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Staude J., Wave instabilities in an anisotropic magnetized space plasma, Astron. Astrophys., Vol. 489, No.2, 2008, pp.769-772.
12. Kuznetsov V. D., Dzhalilov N. S. Sixteen-Moment Approximation for a Collisionless Space Plasma: Waves and Instabilities, Plasma Physics Reports, Vol.35, No.11, 2009, pp. 962–975.
13. Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Anisotropic MHD Model and Some Solutions, Plasma Physics Reports, Vol.36, No.9, 2010, pp. 788–793.
14. Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Staude J., Wave Instabilities of a Collisionless Plasma in Fluid Approximation, Contrib. Plasma Phys., Vol. 51, No.7, 2011, pp. 621-638.
15. Parker E.N., Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields, Astrophys. J., Vol.128, No.11, 1958, pp. 664-676.
16. Parker E.N., Interplanetary dynamical processes, New York, Interscience Publishers, 1963, 272 p.
17. Parker E.N., Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. V. Stability and Wave Propagation, Astrophys. J., Vol.143, No.1, 1966, pp.32-37.

18. Echim M., Lemaire, J., Lie-Svendsen O., A review on solar wind modeling: kinetic and fluid aspects , arXiv: astro-ph.SR, Vol.1, 1306.0704, 2013, 68 p.
19. Ахиезер А.И., Электродинамика плазмы, М.: Наука, 1974, 719 с.
20. Grad H., On the kinetic theory of rarefied gases, Commun. Pure and Appl. Math., Vol.2, No.4, 1949, pp.331-407.
21. Weber E.J., Davis L., The angular momentum of the solar wind, Astrophys. J., Vol.148, No.4, 1967, pp.217-227.

Anizotrop Günəş küləyi tənliyinin bir xüsusi həlli haqqında

N.S. Cəlilov, N.A. Əliyev, N.A. İsmayılov

XÜLASƏ

Məqalədə 16 momentli MHD köçürmə tənlikləri əsasında stasionar və radial Günəş küləyinin yayılması tənlikləri çıxarılmışdır. Bu tənliklər proton plazmasının temperatur anizotropluğunu və külək boyunca yayılan istilik selini nəzərə alaraq Parker modelini ümumiləşdirir. Qoyulan məsələ üç qeyri-xətti adi törəməli difrensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Bu tənliklər sisteminin xüsusi analitik həlli tapılmışdır ki bu da Günəşdən heliosferin sonuna qədər tətbiq oluna biləcək qlobal həllin qurulmasında istifadə olunacaqdır.

Açar sözlər: kosmik plazma, maqnit hidrodinamikası, Günəş küləyi.

On a particular solution of the anisotropic solar wind equations

N.S. Dzhalilov, N.A. Aliev, N.A. Ismailov

ABSTRACT

İn the paper the radial propagation of the stationary solar wind equations on the base of 16-moment transport MHD-equations are derived. In these equations there are taking into account the temperature anisotropy of the proton plasma and heat flow along the wind that generalize the model of Parker. The problem is reduced to solving a system of three nonlinear ordinary differential equations. Found particular analytical solution can be used to find global solutions fair to the edge of the Sun heliosphere.

Keywords: cosmic plasmas, magneto hydrodynamics, solar wind.